# 3一連結対木グラフのクラスを特徴付ける理論の構築に関する研究

篠田　庄司
中央大学理工学部　教授

## 1．はじめに

グラフの閉路を含まない要素数最大の枝集合を木という。グラフの木に含まれない枝集合をその木と対をなす補木という。木となる補木が存在するようなグラフを対木構造を持つグラフ、略して対木グラフという。対木グラフは枝を共有しない丁度二つの木で枝集合が被服されるグラフのことである。対木グラフを真部分グラフとして含まない対木グラフを素である（極小である、最小である、または強既約である）という。対木グラフに着目した最初の人は H.B.Lee である。彼は

H.B. Lee,"On the differing abilities of RL structures to realize natural frequencies," IEEE Trans. Circuit Theory, CT-12, 3, p.365, 1965

において対木グラフが回路構成論上特別な役割を果たすことを指摘した。その後、１９６８年になって、

岸、梶谷：最大距離にある２つの木について、電子通信学会創立５０周年記念全国大会、論文番号３０、１９６７

岸、梶谷：リニアグラフにおける最大距離にある２つの木、電子通信学会論文誌、５１ーA、５、p．１９６，１９６８

において、任意のグラフがある基準のもとで三つのグラフに分割され、その三つのグラフのひとつが対木グラフであることが明らかにされた。また、同時に

大附、石崎、渡部、梶谷、岸：電気回路のトポロジ的自由度、電子通信学会創立５０周年記念全国大会、論文番号３１、１９６７

大附、石崎、渡部: 回路網解析と位相幾何学自由度、電子通信学会論文誌、５１ーA、６、p．２３８，１９６８

において、回路の混合解析における最小変数集合の選択の多様性が回路の接続構造を与えるグラフの岸・梶谷の３分割（基本分割といわれる）の対木グラフ部分から発生することが明らかにされた。そして、

梶谷：グラフの基本分割に関する二、三の性質、昭和４５年電気四学会連合大会、基礎理論、論文番号５４、１９７０

小沢：ある最小グラフについて、昭和４５年電気四学会連合大会、基礎理論、論文番号５５、１９７０

において、次のような性質１）と２）が明らかにされた。１）素でない対木グラフに含まれる任意の二つの素な対木部分グラフは枝を共有することもなく、点は共有するとしても１点だけである。２）素でない対木グラフに対して、そのすべての素な対木部分グラフを短絡除去して

得られるグラフは対木グラフで、素でない対木グラフに対して、そのような短絡除去を繰り返し適用すると、対木グラフの系列とその系列の各対木グラフにおけるすべての素な対木グラフが得られ、素でない対木グラフは素な対木グラフに分解される。この結果、対木グラフの理論で残された重要な問題は、「素な対木グラフのクラスは、Tutteの３－連結グラフの特徴付けのような意味で、どのように特徴づけられるか」という問題となった。しかし、それを解く鍵となるアイデアが発見されないまま、２０年以上の年月が過ぎ去った。

他方、情報通信ネットワークの分野では、高品質高信頼サービスを保証する立場から、階層化された情報通信ネットワークの、特に上層部ネットワークの接続構造に閉路構造を組み込むことがなされてきている。しかしながら、閉路構造を組み込むとしても、経済的観点から、できるだけ粗な接続構造のもとでの信頼度の確保が問題となる。この問題に対しては、これまで、連結度を与えてネットワークを生成する方法を設計するなどの研究がなされてきた。筆者は、対木グラフを接続構造とするネットワークが、連結度では、連結度3以下であるが、任意の局から全局への（回線を共有しないという意味で）同時に2重の通信を保証するとともに、連結度が3（または2）の場合は、任意の2局間に（途中の局を共有しないという意味で）同時に3（または2）重の通信を保証することを考慮し、上記の信頼度確保問題への接近として、ネットワークの接続構造として対木グラフに着目することにした。

それは、必然的に先に述べた「素な対木グラフのクラスはどのようなものとなるか」という特徴付け問題に挑戦することを意味した。それで、対木グラフはそれ自体で閉路を形成する枝（自己閉路枝という）もそれ自体でカットセットを形成する枝（自己カットセット枝、または橋という）を含まないことと、対木グラフのどの非可分成分も２－連結または３－連結である対木部分グラフで、素な対木グラフは２－連結か３－連結であることを考慮し、研究助成申請時点では、（問題が難しか、どうかが判明しなかったため）、その問題の部分問題の「素な３－連結対木グラフのクラスはどのようなものとなるか」という問題に焦点を合わせ、標題のような研究助成の申請を行った。

標題の３－連結対木グラフのクラスの特徴付けは、梶谷、小沢の結果を考慮すると、素な３－連結対木グラフのクラスの特徴付けに帰着される。今回の研究では、後者の特徴付けの問題に対して、「素な３－連結対木グラフは4個の点からなる車輪グラフ（$W_4$と表す）自体か、またはその車輪グラフ$W_4$から（この報告書で定義する）Ｔ－操作という単純な演算を繰り返し適用して生成されるグラフである」という美しい解答を得ることができた。

また、この研究との関連で、「素な２－連結対木グラフは2個の枝からなる閉路（$C_2$と表す）自体か、またはいくつかの素な３－連結対木グラフから（この報告書で定義する）U－操作という単純な演算を繰り返し適用して生成されるグラフである」という命題も証明できた。このことは、上記の解答との組み合わせで、「閉路$C_2$以外の素な対木グラフは車輪グラフ$W_4$、ならびにその車輪グラフ$W_4$にＴ－操作を繰り返し適用して得られるグラフに対して、U－操作を繰り返し適用して生成されるグラフである」という重要な命題を証明したことになる。また、さらに梶谷、小沢の結果の内容を組み合わせると、対木グラフのクラスの特徴付け理論が、こ

の研究によって完成したことになる。本研究助成は、その意味において、大変な機会を筆者に与えてくれたことになり、深く感謝する次第である。

なお、定義なしに用いられる連結度、車輪グラフなどの用語については、グラフ理論の適当な専門書を参照されたい。

## 2　素な３－連結対木グラフの特徴付け

命題１：４－連結である素な対木グラフは存在しない。

証明：n個の点とm個の枝を持つ４－連結対木グラフの次数kの点の数を $n_k$ と表す。そのとき、

$$m = [4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + \ldots + p(n - n_4 - n_5 - n_6 - \ldots - n_{p-1})]/2$$
$$\geq [4n_4 + 4n_5 + 4n_6 + \ldots + 4(n - n_4 - n_5 - n_6 - \ldots - n_{p-1})]/2$$
$$\geq [4n]/2 = 2n$$

が成り立つが、対木構造であることから、 $m = 2(n-1)$ でなければならないから、矛盾となり、命題が成り立つ。//

これにより、連結対木グラフは高々３－連結であることになる。そして、自己閉路枝はつねにすべての補木に含まれ、また双対的に自己カットセット枝はつねにすべての木に含まれなければならないから、連結対木グラフは、２－連結でないときには、２－連結か３－連結である対木部分グラフをカット点（その点とその点に接続される枝を除くと、グラフの連結度が増加する点）で接続されたサボテンのような形をしたグラフとなる。また、素な対木グラフは、素であることの定義から、２－連結か３－連結となる。点の数が６以下の素な対木グラフをすべて示すと、図１に示されるグラフとなる。図１(a)のグラフは点の数が一番少ない２－連結対木グラフで、２個の枝からなる閉路 $C_2$ といわれるものである。また、図１(b)のグラフは点の数が一番少ない３－連結対木グラフで、４個の枝からなる車輪グラフ $W_4$ といわれるものである。これらを考慮すると、素でない３－連結対木グラフは素な３－連結対木グラフを真部分グラフとして含まなければならないから、点の数が最も少ない素でない２－連結対木グラフは図２(a)となり、点の数が最も少ない素でない３－連結対木グラフは同図(b)となる。

次に、グラフGのある枝 x=(a,b) を二つの直列枝 y=(a,d) と z=(d,b) で置き換えることをその枝 x の<u>２分割</u>といい、点ｄをその枝の２分割による<u>挿入点</u>という。グラフGに対して、ある枝 x=(a,b)を２分割し、その２分割による挿入点と他の点の間に、並列枝が生成されないように、枝を１個付加する操作を<u>Ｔ－操作</u>という（図３を参照）。このとき、４個の点からなる車輪グラフ $W_4$ 以外の任意の車輪グラフは $W_4$ からＴ－操作で得られることが、容易に示すことができる。また、容易に証明されることであるが、次の命題が成り立つ。

命題２：　３－連結対木グラフにおいてＴ－操作の逆が可能であるための必要十分条件は、

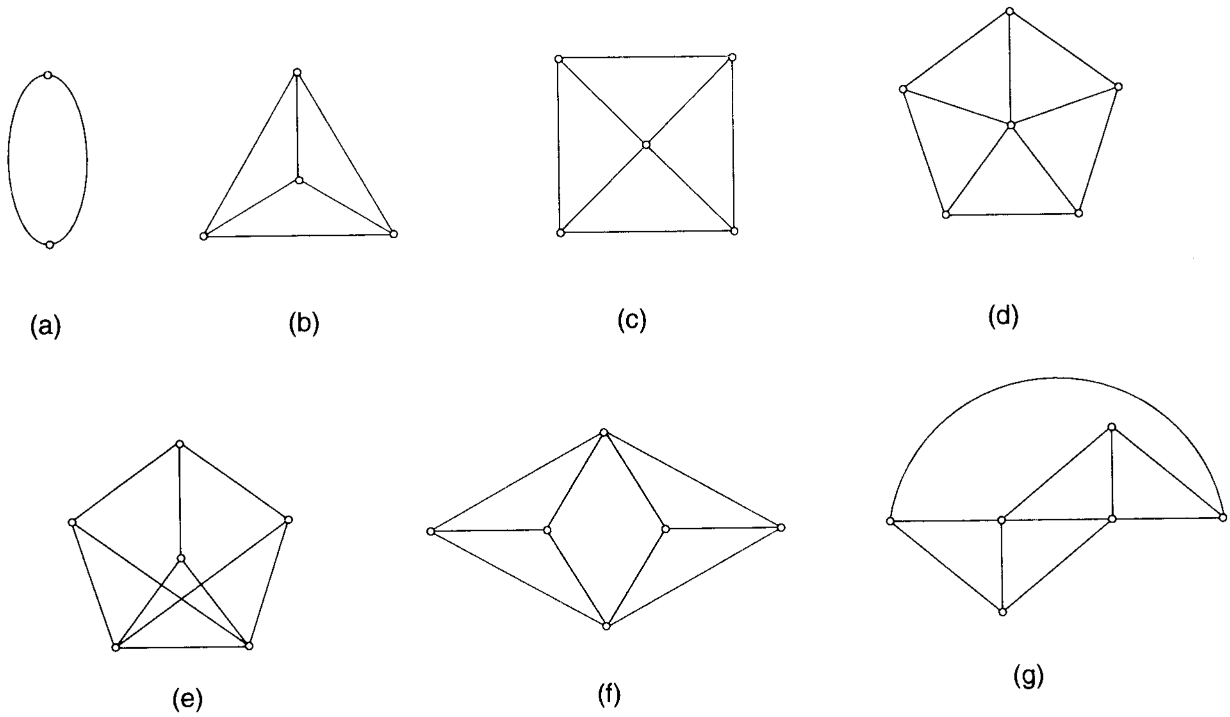


図１　点の数が６以下の素な対木グラフのすべて

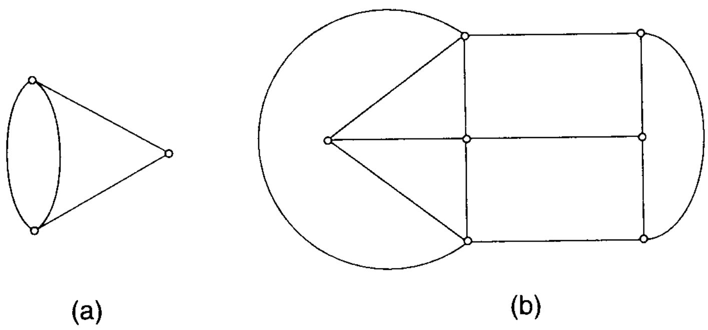


図２　点の数が最も少ない素でない２－連結と３－連結のグラフ

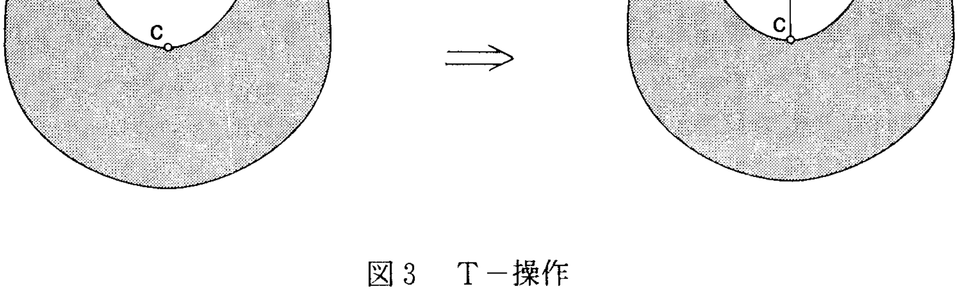


図３　Ｔ－操作

次数３の点が存在し、その点に隣接する点の一つの次数が４以上で、残りの２点（仮に a、b と表す）の次数がともに３以上であり、その２点 a、b は互いに隣接しないことである。

この命題から、T－操作の逆が適用されるためには、次数４以上の点がすくなくとも一つ含まれることが必要となる。これに関連して、次の命題が成り立つ。

命題３： すべての３－連結対木グラフは次数３の点をすくなくとも４個含み、$W_4$ 以外の３－連結対木グラフは次数４以上の点を少なくとも１個含む。

証明： n 個の点と m 個の枝を持つ３－連結対木グラフの次数 k の点の数を $n_k$ と表す。そのとき、

$$
\begin{aligned}
m &= 2(n-1) \\
&= [3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots + p(n - n_3 - n_4 - n_5 - \dots - n_{p-1})]/2 \\
&\geq [3n_3 + 4n_4 + 4n_5 + \dots + 4(n - n_3 - n_4 - n_5 - \dots - n_{p-1})]/2 \\
&\geq [3n_3 + 4(n - n_3)]/2
\end{aligned}
$$

となり、これから $n_3 \geq 4$ の関係を得る。したがって、すべての３－連結対木グラフは次数３の点をすくなくとも４個含む。次に、３－連結対木グラフに次数４以上の点が含まれないとしたら、上の関係において等号が成り立ち、そのグラフとしては $W_4$ 以外に存在しないことになる。したがって、$W_4$ 以外の３－連結対木グラフは次数４以上の点を少なくとも１個含む。//

注目すべきことは、この命題によって、$W_4$ 以外の３－連結対木グラフに次数４以上の点が必ず含まれ、そのような点のすくなくとも一つに対して、隣接する次数３の点が存在することが保証されることである。そして、命題２と３を考慮すると、次の定理が証明される。

定理１： 素な３－連結対木グラフは $W_4$ であるか、$W_4$ からT－操作を繰り返し適用して得られるグラフである。

この定理の証明の詳しい記述は学会での研究発表の機会に報告する。ここでは、証明の概略を説明しておく。まず、$W_4$ 以外の３－連結対木グラフGを考える。そのとき、命題３から、Gには次数４以上の点が必ず含まれ、そのような点のすくなくとも一つに対して、隣接する次数３の点が存在する。T－操作の逆操作を行うことができるときには、次数４以上の点に隣接する次数３の点が１個消去され、次数４以上の点の一つの次数が１だけ減少することになる。このことを考慮すると、命題２から、次数４以上の点に隣接する次数３の点で、T－操作の逆操作によって消去することのできないものは図４の(a)と(b)のいずれかの点 d の場合ということになる。(a)の場合は点 d に隣接する３点 a、b、c のどの次数も４以上である場合で、$W_4$ が真部分グラフとして含まれることになり、Gが素であることに反することになる。また、(b)の場合は点 d に隣接する３点 a、b、c のうち点 a、b の次数が３で、点 c の次数が４以上である場

合で、図4(c)のように表される場合で、点線で囲まれた部分が3－連結対木部分グラフであることが証明され、Gが素であることに反することになる。このように、$W_4$以外の素な3－連結対木グラフにはつねにT－操作の逆操作が適用でき、最終的に$W_4$に帰着され、T－操作の逆操作が適用できないのは、3－連結対木グラフが素でないときであることになり、定理は証明される。

梶谷、小沢の結果と組み合わせると、この定理によって、3－連結対木グラフのクラスの特徴付けが完成したことになる。これが標題の研究に対する解答である。

## 3　あとがき　－　補足込み

この研究で、定理1を証明することによって、3－連結対木グラフのクラスの特徴付け、すなわち研究課題の解決に成功した。まえがきに触れたが、実は、この研究を推進するうちに、2－連結対木グラフのクラスの特徴付けにも成功することになり、対木グラフのクラスの特徴付け理論がこの研究助成を機に完成することとなった。以下に、2－連結対木グラフのクラスの特徴付けについての成果を概説しておく。

命題4：　3個以上の点を持つ二つの2－連結または3－連結対木グラフ$G_1$と$G_2$に対して、$G_1$の任意の枝 (a,b)を開放除去して得られるグラフを $G_1'$ とし、$G_2$の任意の枝 (c,d)を開放除去して得られるグラフを $G_2'$ とする。次に、$G_1'$と$G_2'$に対して、aとcを一致させると同時にbとd を一致させることによって得られるグラフを G とする。このとき、Gは2－連結対木グラフである。ここに、$G_1$と$G_2$からGを得る操作をU－操作という（図5を参照）。

この証明はほぼ自明であるので、省略する。図1の(f)のグラフは同図(b)の車輪グラフ$W_4$の二つのコピーからU－操作で得られる。このU－操作の逆は自明ではない。4個以上の点を持つ2－連結であるが3－連結でないグラフGはつねに次の性質1）と2）を満たす2点aとbを持つ。

1）　2点aとbを、それらに接続する枝とともに、除去してGから得られるグラフは連結でない。

2）　Gには、その2点aとbのみを共有する2個の連結部分グラフで、それぞれが3点以上を持つものが存在する。

ここに、そのような二つの連結部分グラフを$G_1'$と$G_2'$と表すとき、その2個の点aとb をGにおける$G_1'$と$G_2'$の2点分離集合とか、単に2点分離集合という。また、$G_1'$と$G_2'$をGの点aとbを2点分離集合とする相補的2－端子部分グラフという。$G_1'$ をGにおける$G_2'$ の補グラフといい、$G_2'$ をGにおける$G_1'$ の補グラフという。Gにおいて$G_2'$を一つの新しい枝xで置き換えることによって得られるグラフを$G_1$と表し、$G_1'$ を一つの新しい枝xで置き換えることによって得られるグラフを $G_2$と表す。このとき、Gが$G_1$と$G_2$から、置き換えた枝に着目し、U－操

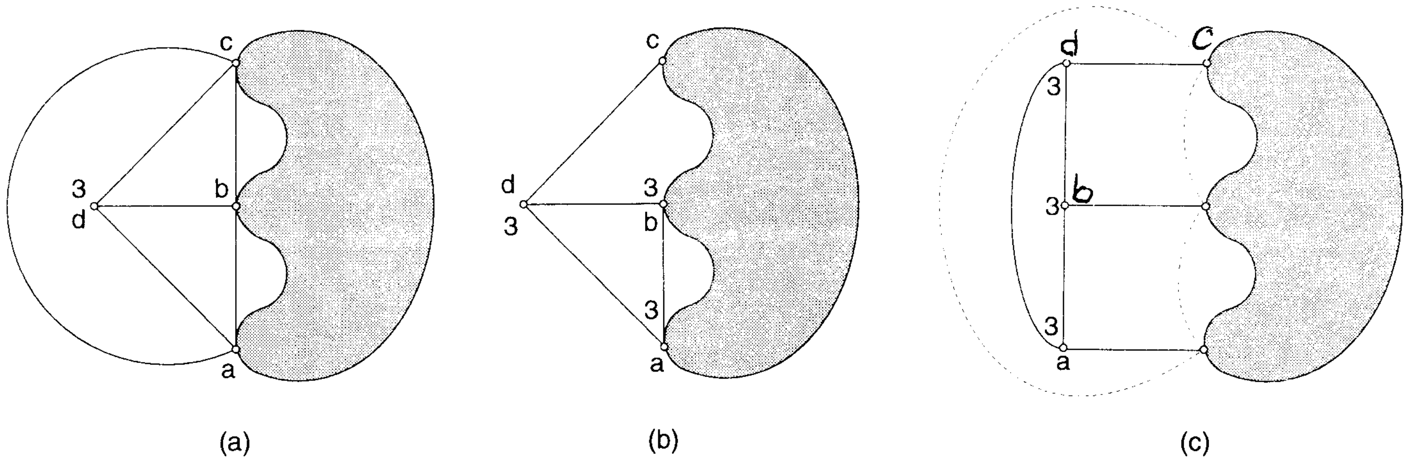


図 4　次数 4 以上の点に隣接する次数 3 の点で，T－操作の逆操作によって消去することができないもの（点 d）の場合

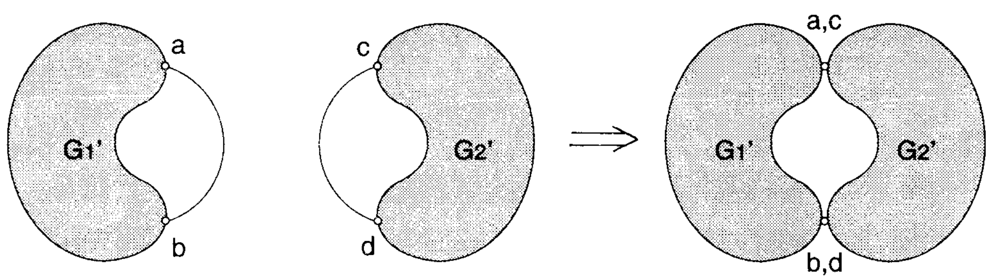


図 5　U－操作

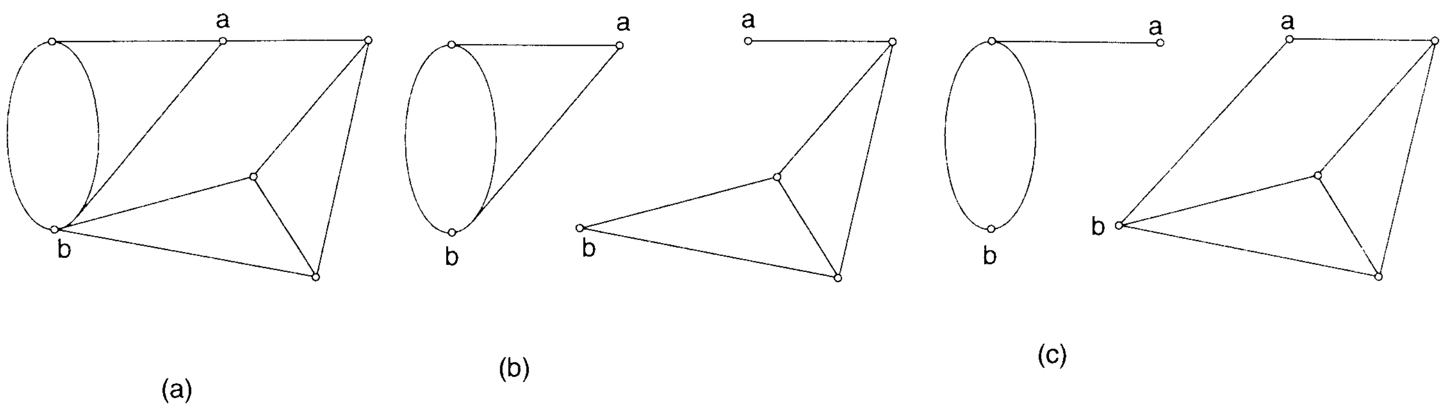


図 6　同じ 2 点分離集合を持つ相補的 2 －端子部分グラフの対が複数存在する場合

作によって復元されるという意味で、置き換えた枝をそれぞれ$G'_2$と$G'_1$の代表枝という。ここに、$G_1$をGの$G'_2$簡約グラフといい、$G_2$をGの$G'_1$簡約グラフといい、略して、$G_1$と$G_2$を$G'_1$と$G'_2$の対をなす簡約グラフという。ここで注意すべきは、同じ2点分離集合を持つ相補的2ー端子部分グラフの対が複数存在する場合があることである。図6(a)のグラフは点aとbを2点分離集合として持つ2ー連結対木グラフである。このグラフに対して、同図(b)のグラフの対と同図(c)のグラフの対はともに点aとbを2点分離集合とする相補的2ー端子部分グラフであるが、前者の対をなすグラフの対をなす簡約グラフはどちらも対木グラフでないが、後者の対をなすグラフの対をなす簡約グラフはどちらも対木グラフである。

命題5：　3個以上の点を持つ二つの素な2ー連結または3ー連結対木グラフ$G_1$と$G_2$に対して、$G_1$の任意の枝 (a,b)を開放除去して得られるグラフを $G'_1$ とし、$G_2$の任意の枝 (c,d)を開放除去して得られるグラフを $G'_2$ とする。次に、$G'_1$と$G'_2$に対して、aとcを一致させると同時にbとd を一致させることによって得られるグラフを G とする。このとき、Gは素な2ー連結対木グラフである。逆に、Gを4個以上の点を持つ2ー連結であるが3ー連結でない素な対木グラフとする。このとき、Gの各2点分離集合に関して相補的2ー端子部分グラフ$G'_1$と$G'_2$が一意的に存在し、それらの派生グラフはつねに素な2ー連結または3ー連結対木グラフとなる。

この命題の証明は学会での研究発表の機会に報告する。この命題の結果、次の定理が得られる。

定理2：　素な2ー連結対木グラフは2個の枝からなる閉路$C_2$自体か、または（いくつかの）素な3ー連結対木グラフからUー操作を繰り返し適用して生成されるグラフである。

そして、この定理と定理1を組み合わせると、2個の枝からなる閉路$C_2$以外の素な対木グラフは車輪グラフ$W_4$、ならびにその車輪グラフ$W_4$にTー操作を繰り返し適用して得られるグラフに対して、Uー操作を繰り返し適用して生成されるグラフであるという結果を得る。また、さらに梶谷、小沢の結果の内容を組み合わせると、対木グラフのクラスの特徴付け理論が、この研究によって完成したことになる。

最後に、本研究助成に対し、深く感謝する次第である。